

## **Zielgruppe**

Dieser Text richtet sich an ambitionierte Taucher mit fundierten mathematischen Kenntnissen. Er soll dazu dienen, daß Verständnis des Modells zu erweitern und es rechnergerecht darzustellen. Am Ende wird eine Formel präsentiert, mit der ohne ohne Interpolation die Sättigung von Auf- und Abstiegen mit konstanter Geschwindigkeit berechnet werden kann.

## **Vorbemerkung**

Die nachfolgende Beschreibung bezieht sich vornehmlich auf die mathematischen Eigenschaften des Bühlmannmodells. Jedem sollte klar sein, daß ein Modell nur einige Aspekte der Wirklichkeit nachempfunden und daraus versucht möglichst genaue Vorhersagen abzuleiten. Eine Annahme des Bühlmannmodells ist z.B. das sich verschiedene Gewebe mit unterschiedlichen Halbwertszeiten nicht gegenseitig beeinflussen. Der menschliche Körper verhält sich nicht so! Selbstverständlich beeinflussen sich die unterschiedlichen Gewebe gegenseitig. Wie kann sich z.B. ein Knorpel mit Stickstoff sättigen, wenn er gar nicht mit Gas in Berührung kommt? Er sättigt aus den angrenzenden Geweben, und er gibt das N<sub>2</sub> auch wieder in angrenzende Gewebe ab! Das eine Modellannahme trotzdem akzeptable Ergebnisse ausspuckt, darf nicht zu grundsätzlichem Mißverständnis führen.

In der Biologie betrachtet man dazu Pharmako- oder Toxikokinetiken.. Diese Kinetiken beschreiben die Veränderungen von Fremdstoffkonzentrationen im Organismus mit dem Ziel einer quantitativen Vorhersage der Stoffkonzentration in einzelnen Organen zu einem bestimmten Zeitpunkt. Das beschriebene Modell ist nichts anderes als die Toxikokinetik von N<sub>2</sub> im menschlichen Körper. Die Annahme von Kompartimenten ist in diesem Bereich durchaus üblich, man unterscheidet dabei in Resorptions-, Verteilungs- und Eliminationskinetik. Im einfachsten Fall nimmt man eine Einkompartimentenmodell und eine Kinetik erster Ordnung an, das sogenannte Bateman-Modell. Im Experiment gemessene Daten lassen sich praktisch immer nur durch Überlagerung mehrerer Exponentialfunktionen mit unterschiedlichen Eliminationskonstanten interpretieren. NB: Dieses Vorgehen weist viele parallelen zu Modellierung, Analyse, und Entwurf von regelungstechnischen Systemen auf.

Knackpunkt dabei ist, daß einfachere Modelle mehrphasige Prozesse nicht beschreiben können. Die Gründe für die Mehrphasigkeit liegen in der inhomogenen Verteilung eines Stoffes und unterschiedlichen Transportgeschwindigkeiten.. Nun kurz gesagt, der menschliche Körper besteht zwar aus einer endlichen Anzahl von Geweben, allerdings lassen sich ihre Resorptions und Eliminationskinetiken nur schlecht beschreiben. Dabei stehen alle Kompartimente mit dem Kompartiment Blut in mehr oder weniger starker Verbindung und in Verbindung mit mehr oder weniger zahlreichen Nachbargeweben. Wenn eine einfache Modellierung dieser Prozesse - wie das Bühlmannmodell - in der Praxis unter der Annahme, daß sich verschiedene Gewebe mit unterschiedlichen Halbwertszeiten nicht gegenseitig beeinflussen und es auch keine Rolle spielt wann man den Sättigungsvorgang betrachtet, brauchbare und sichere Ergebnisse liefert, ist das gut. Aber eins ist sicher, das Modell beschreibt sicherlich nicht einen realen menschlichen oder sonstigen Organismus, und das sollte man nie aus den Augen verlieren.

## Grundlagen

Zur Erinnerung Bühlmann's zentrale Sättigungsformel für Rechteckprofile:

$$P_{tiG}(t_e) = P_{tiG}(t_0) + [P_{IiG} - P_{tiG}(t_0)] \cdot (1 - 2^{-t_e/t_{12}}) \quad (Gl\ 1)$$

$P_{tiG}(t_0)$  : Inertgasdruck im Gewebe zu Beginn der Exposition [bar]  
 $P_{tiG}(t_e)$  : Inertgasdruck im Gewebe am Ende der Exposition [bar]  
 $P_{IiG}$  : Inertgasdruck im Atemgas [bar]  
 $t_e$  : Expositionszeit [min]  
 $t_{12}$  : Gewebehalbwertszeit [min]  
 $P_{IiG} - P_{tiG}(t_0)$ : Druckgradient

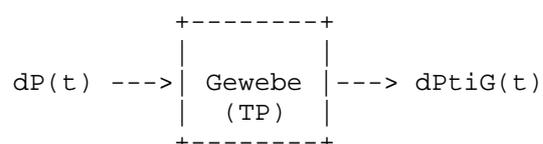
Im Falle eines Rechteckprofils beschreibt er die Differenz zwischen der Gewebesättigung zu Beginn der Exposition und dem Sättigungszustand der sich nach 'unendlich' langer Zeit einstellen würde. Je größer dieser ist desto schneller sättigt oder entsättigt sich das Gewebe. Für die Praxis bedeutet das, das Gewebe wird bei tiefen Tauchgängen schneller gesättigt als bei flacheren Tauchgängen (gleiche Tauchzeiten vorausgesetzt). Im Umkehrschluß heißt dies, das die Entsättigung in geringeren Tiefen schneller vor sich geht. Daher versuchen Tabellen den Druckgradienten möglichst nahe am tolerierten Limit zu halten. Das ist ein Grund warum die Austauschstufen bei Dekompressionstabellen immer flacher werden. Das Vorzeichen des Gradienten bestimmt die Sättigungsrichtung: ein positiver Gradient bedeutet Aufsättigung ein negativer Entsättigung. Für praktische Überlegungen kann von einer vollständigen Sättigung bzw. Entsättigung nach etwa  $5 \cdot t_{12}$  ausgegangen werden. Nach dieser Zeit ist etwa 97% des Endwerts erreicht.

Da der Rechner für gewöhnlich keine Funktion zur Berechnung einer allgemeinen Exponentialfunktion, sondern nur die e-Funktion bereitstellt, ist es nötig die Darstellung von (Gl 1) anzupassen. Durch Anwendung des Potenzgesetzes  $a^{(x \cdot y)} = (a^x)^y$  mit  $a = e$  und  $a^x = 2$  folgt  $x = \ln 2$ , damit ist  $2^y = e^{(\ln 2 \cdot y)}$ . Wobei  $\ln 2$  der Logarithmus von 2 zur Basis  $e$  ist. Eingesetzt in (Gl 1) erhält man:

$$P_{tiG}(t_e) = P_{tiG}(t_0) + [P_{IiG} - P_{tiG}(t_0)] \cdot (1 - e^{-t_e \cdot \ln 2 / t_{12}}) \quad (Gl\ 2)$$

## Der Menschliche Körper als System

Grundlegend für das Bühlmann'sche Modell ist, das eine Änderung des Druckgradienten eine exponentielle Änderung des Sättigungszustands bewirkt. Dies entspricht der Auffassung, daß ein Gewebe (Kompartiment) ein Inertgasspeicher ist. Da Bühlmann davon ausgeht, daß sich die modellierten Gewebe nicht gegenseitig beeinflussen und es auch keine Rolle spielt wann man den Sättigungsvorgang betrachtet, beschreibt das Modell ein lineares, zeitinvariants System. Solche Systeme werden klassisch durch lineare Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten beschrieben. Eine besonders elegante Alternative dazu ist die Beschreibung des Systemes - unter Zuhilfenahme der Laplace-Transformation im Bildbereich. Im Fall des Bühlmannmodells entspricht das Verhalten eines Gewebes dem eines PT1 Regelungslieds. Die Übertragungsfunktion eines solchen Glieds ist als  $k/(1 + \tau \cdot s)$  definiert, wobei  $k$  eine Proportionalitätskonstante und  $s$  die Laplace-Transformationsvariable ist.



Die Änderung der Sättigung wird dann beschrieben durch:

$$L(dP_{tiG}(t)) = L(dP(t)) * H_{Gewebe} \quad (Gl\ 3)$$

$L(dP_{tiG}(t))$  : Laplace Transformierte der Sättigungsänderung  
 $L(dP(t))$  : Laplace Transformierte des Druckgradienten  
 $H_{Gewebe}$  : Übertragungsfunktion des Gewebes

Um die tatsächliche Gewebesättigung zu bestimmen darf die Vorsättigung nicht vergessen werden. Die Behandlung geschieht analog wie bei physikalischen Systemen die eine Anfangsenergie besitzen:

$$L(P_{tiG}(t)) = L(dP_{tiG}(t)) + L(P_{tiG}(t_0)) \quad (Gl\ 4)$$

$L(P_{tiG}(t))$  : Laplace Transformierte der Gewebesättigung zur Zeit  $t$   
 $L(P_{tiG}(t_0))$  : Laplace Transformierte des Inertgasdruck im Gewebe zu Beginn der Exposition.

Durch Einsetzen von (Gl 3) erhält man:

$$L(P_{tiG}(t)) = L(dP(t)) * H_{Gewebe} + L(P_{tiG}(t_0)) \quad (Gl\ 5)$$

Mit  $H_{Gewebe} = 1/(1+\tau*s)$  folgt

$$L(P_{tiG}(t)) = 1/(1+\tau*s) * L(dP(t)) + L(P_{tiG}(t_0)) \quad (Gl\ 6)$$

$\tau$  : Zeitkonstante des Gewebes (Achtung: nicht Halbwertzeit!)

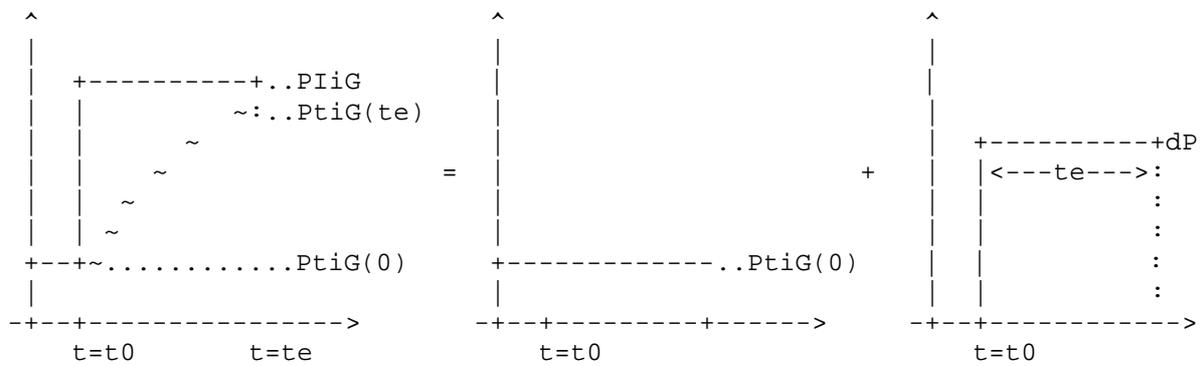
Anhand von drei Beispielen soll nun gezeigt werden wie man von der Modellvorstellung zu konkret verwendbaren Formeln wie (Gl 1) kommt. Ziel ist es eine Formel zu entwickeln, die es einem Programm ermöglicht verschiedene Sättigungsvorgänge mit einer Methode zu berechnen, ohne dabei auf ein Interpolationsverfahren zurückgreifen zu müssen. Im konkreten geht es dabei um Auf- und Abstiege mit konstanter Geschwindigkeit und das Verweilen auf einer Tiefe. Bisherige Softwarepakete berechnen die Sättigungsvorgänge von Auf- und Abstiegen durch Unterteilung in viele kurze Zeitintervalle, die dann jeweils für sich als Wegstück mit konstanter Tiefe gerechnet werden.

Dieses Verfahren hat mehrere Nachteile:

- Programmiertechnisch müssen Auf- und Abstiegsphasen unterschiedlich zu "verweilen auf Tiefe" Phasen behandelt werden.
- Es benötigt mehr Rechenzeit, da je feiner und genauer die Abstufung der Algorithmus  $n$ -Mal abgearbeitet werden muß.
- Durch endliche Wortlängen und Rundungsfehler akkumuliert sich der systematische Fehler.

### Beispiel 1: Rechteckprofil

Das Gewebe ist zu Beginn der Exposition mit  $P_{tiG}(t_0)$  gesättigt. Zur Zeit  $t_0$  ändert sich der Inertgasdruck im Atemgas von  $P_{tiG}(t_0)$  auf  $P_{IiG}$ . Dies ist der klassische Fall von Bottomtime. Zu Berechnen die Sättigung nach der Zeit  $t$ .



$$dP = P_{IiG} - P_{tiG}(t_0) = \text{const.}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow L(dP) &= (P_{IiG} - P_{tiG}(t_0))/s \\ \Rightarrow L(P_{tiG}(t_0)) &= P_{tiG}(t_0)/s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(P_{tiG}(t)) &= \frac{1}{(1+\tau s)} * \frac{(P_{IiG} - P_{tiG}(t_0))}{s} + \frac{P_{tiG}(t_0)}{s} \\ &= \frac{(P_{IiG} - P_{tiG}(t_0))}{s + \tau s^2} + \frac{P_{tiG}(t_0)}{s} \end{aligned}$$

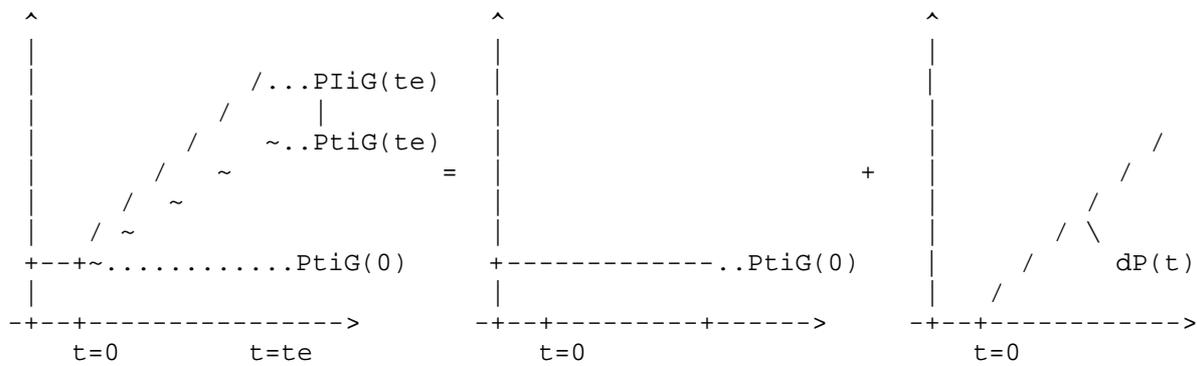
Nach der Rücktransformation von  $L(P_{tiG}(t))$  ergibt sich

$$P_{tiG}(t) = [P_{IiG} - P_{tiG}(0)] * (1 - e^{-t/\tau}) + P_{tiG}(0) \quad (\text{Gl 7})$$

Für  $t = t_e$  und  $\tau = t_{1/2} / \ln(2)$  sind (Gl 2) und (Gl 7) identisch.

## Beispiel 2: Auf/Abstieg mit konstanter Geschwindigkeit

Das Gewebe ist zu Beginn der Exposition mit  $P_{tiG}(0)$  gesättigt. Zur Zeit 0 wächst der Intertgasdruck im Atemgas von  $P_{tiG}(0)$  auf  $P_{IiG}$  über einen Zeitraum von  $t_e$  linear an. Zu Berechnen die Sättigung nach der Zeit  $t$ .



$$k = (P_{IiG} - P_{tiG}(0))/t_e = \text{const.}$$

$$dP = k \cdot t$$

$$\Rightarrow L(dP) = k/s^2$$

$$\Rightarrow L(P_{tiG}(0)) = P_{tiG}(0)/s$$

$$L(P_{tiG}(t)) = \frac{1}{(1+\tau \cdot s)} \cdot \frac{k}{s^2} + \frac{P_{tiG}(0)}{s}$$

$$= \frac{(P_{IiG} - P_{tiG}(0))}{t_e \cdot (s^2 + \tau \cdot s^3)} + \frac{P_{tiG}(0)}{s}$$

k: Abstiegsrate

Nach der Rücktransformation von  $L(P_{tiG}(t))$  ergibt sich

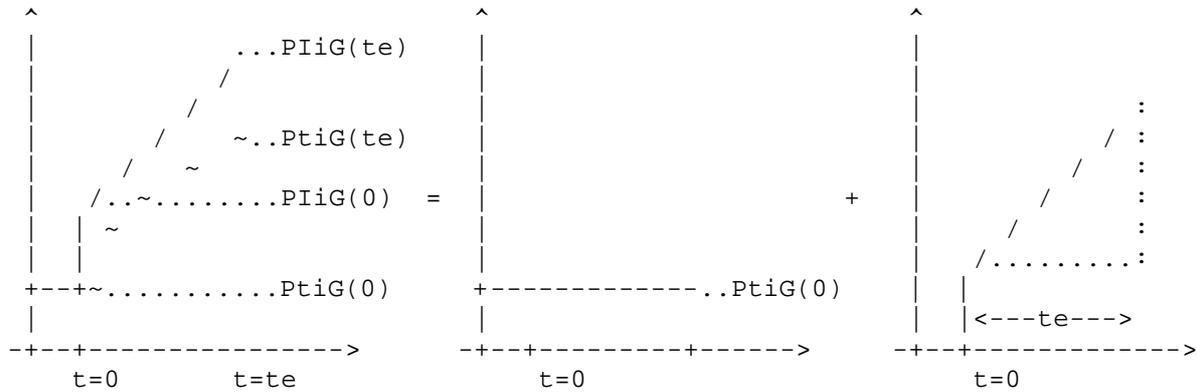
$$P_{tiG}(t) = k \cdot \tau \cdot [e^{(-t/\tau)} + t/\tau - 1] + P_{tiG}(0) \quad (\text{Gl } 8)$$

Mit  $\tau = t_{1/2}/\ln(2)$

NB: Der Startzeitpunkt  $t_0=0$  wurde deshalb gewählt, weil sich dann der Druckgradient sehr leicht transformieren läßt. Wäre  $t_0 \neq 0$  müßte neben der Achsenverschiebung der Anstieg mit einem Einheitssprung maskiert werden ( $\Rightarrow dP = k \cdot (t-t_0) \cdot \epsilon(t-t_0)$ ). Das ist zwar rechenbar, allerdings unnötiger Aufwand. Es ist viel einfacher alle Zeiten vorher zu substituieren und auf  $t_0$  zu beziehen.

### Beispiel 3: Gaswechsel, Abstieg mit konstanter Geschwindigkeit

Das Gewebe ist zu Beginn der Exposition mit  $P_{tiG}(0)$  gesättigt. Zur Zeit 0 steigt der Inertgasdruck im Atemgas von  $P_{tiG}(0)$  auf  $P_{IiG}(0)$  sprunghaft an (z.B. durch Atemgaswechsel) und steigt danach kontinuierlich weiter auf  $P_{IiG}(t_e)$  über einen Zeitraum von  $t_e$  linear an. Zu Berechnen die Sättigung nach der Zeit  $t_e$ . Lösung mittels Superposition.



$$k = (P_{IiG}(t_e) - P_{IiG}(0))/t_e = \text{const.}$$

$$C = P_{IiG}(0) - P_{tiG}(0) = \text{const.}$$

$$dP = C + k \cdot t$$

$$\Rightarrow L(dP) = C/s + k/s^2$$

$$\Rightarrow L(P_{tiG}(0)) = P_{tiG}(0)/s$$

$$L(P_{tiG}(t)) = \frac{C}{s} + \frac{1}{(1+\tau \cdot s)} * \frac{k}{s^2} + \frac{P_{tiG}(0)}{s}$$

$$= \frac{P_{IiG}(0) - P_{tiG}(0)}{s} + \frac{(P_{IiG} - P_{tiG}(0))}{t_e \cdot (s^2 + \tau \cdot s^3)} + \frac{P_{tiG}(0)}{s}$$

k: Abstiegsrate

C: Konstanter Teil des Druckgradienten

Nach der Rücktransformantion von  $L(P_{tiG}(t))$  ergibt sich

$$P_{tiG}(t_e) = [P_{IiG}(0) - P_{tiG}(0)] \cdot (1 - e^{-t/\tau}) + [P_{IiG}(t_e) - P_{IiG}(0)] / t_e \cdot \tau \cdot [e^{-t_e/\tau} + t_e/\tau - 1] + P_{tiG}(0) \quad (Gl 9)$$

Mit  $\tau = t_{1/2} / \ln(2)$ . Es gilt ähnliches wie bei Beispiel 2. Da die Koeffizienten keinen Einschränkungen unterliegen, kann man damit die Sättigung in allen Phasen eines Tauchgangs berechnen. Dieses Profil eignet sich gut für den Einsatz in Dekompressionsprogrammen. Ein Tauchgang kann durch Aneinanderreihung von Wegstücken obiger Form recht gut angenähert werden. Eine Sonderbehandlung von Auf/Abstiegsphasen entfällt somit. Ein Wegstück ist beschrieben durch:

$P_{Is}$  : Inertgaspartialdruck zu Beginn der Exposition (~Starttiefe)  
 $P_{Ie}$  : Inertgaspartialdruck am Ende der Exposition (~Endtiefe)  
 $t_e$  : Dauer der Exposition (Zeit)

Für  $P_{Is} = P_{Ie}$  heißt das nichts anderes als das die ursprüngliche Formel (Gl 2) verwendet wird (Grundzeit). Ist  $P_{Is} < P_{Ie}$  befindet man sich in der Abstiegsphase, bei  $P_{Is} > P_{Ie}$  in der Auftauchphase.

Durch eine einfache Umformung erhält man:

$$P_{ti}' = [P_{Is} - P_{ti}] \left( \frac{1 - e^{-a}}{a} \right) + [P_{Ie} - P_{Is}] \left( \frac{1 - e^{-a}}{a} \right) + P_{ti} \quad (\text{Gl 10})$$

$P_{ti}'$ : Gewebesättigung nach der Exposition (Kompartiment i)

$P_{ti}$ : Gewebesättigung vor Exposition (Kompartiment i)

$a$ : Abklingfaktor  $-\ln(2) \cdot t_e / t_{1/2i}$  (mit  $t_{1/2i}$ : Halbwertszeit Kompartiment i)

Um den gesamten Sättigungszustand zu berechnen wird (Gl 10) für jedes Kompartiment i einzeln berechnet. Die Berechnung des tolerierten Umgebungsdrucks bzw. des tolerierten Inertgasgewebedrucks geschieht wie gewöhnlich.

Einheiten: Grundsätzlich können jegliche Zeit- und Druckeinheiten benutzt werden, allerdings sollte man auf die korrekte Umrechnung der Halbwertszeiten achten. A.A. Bühlmann verwendet [min] und [bar].

Literatur: A.A. Bühlmann: Tauchmedizin, Bronstein: Taschenbuch der Mathematik